

Λύσεις ημερησίων ΤΕΕ 2009

Θέμα 1^ο

α.

Πλήθος Κλήσεων x_i	Πλήθος Συνδρομητών v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα (%)	$x_i v_i$
2	4	16	4	16	8
3	6	24	10	40	18
4	5	20	15	60	20
5	7	28	22	88	35
6	2	8	24	96	12
7	1	4	25	100	7
Αθροίσματα	25	100			100

$$\beta. \bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i v_i = \frac{100}{25} = 4 \text{ κλήσεις}$$

$$\gamma. 4 + 6 + 5 = 15 \text{ συνδρομητές}$$

$$\delta. 28\% + 8\% + 4\% = 40\%$$

Θέμα 2^ο

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{x^2 - 8x + 12}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{(x - 2)(x - 6)}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6^+} (x - 2) = 4$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} e^{x-6} (2x - \mu) = e^0 (2 \cdot 6 - \mu) = 12 - \mu$$

γ . Πρέπει να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) \Rightarrow 4 = 12 - \mu \Leftrightarrow \mu = 8$$

$$\delta. \text{Θα πρέπει να ισχύει } \lim_{x \rightarrow 6} f(x) = f(6)$$

$$\text{όμως για } \mu = 8 \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow 6} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 4$$

$$\text{και } f(6) = 3\lambda - 5 \text{ οπότε πρέπει } 3\lambda - 5 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

Θέμα 3^ο

$$f(x) = \frac{x-2}{e^x}$$

$$\begin{aligned} \alpha. f'(x) &= \frac{(x-2)'e^x - (e^x)'(x-2)}{(e^x)^2} = \frac{e^x - e^x(x-2)}{(e^x)^2} = \\ &= \frac{e^x[1-(x-2)]}{(e^x)^2} = \frac{-x+3}{e^x} \end{aligned}$$

$$\beta. f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+3}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-x+3}{e^x} > 0 \Leftrightarrow -x+3 > 0 \Leftrightarrow x < 3 \text{ δεδομένου ότι } e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{-x+3}{e^x} < 0 \Leftrightarrow -x+3 < 0 \Leftrightarrow x > 3$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$

γ. Σύμφωνα με τα παραπάνω η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 3$ το

$$f(3) = \frac{3-2}{e^3} = \frac{1}{e^3}$$

Θέμα 4^ο

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + \lambda x - 2 - \lambda$$

α. Αφού η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(0, -5)$ έχουμε ότι

$$f(0) = -5$$

και επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο για $x = 1$ θα είναι $f'(1) = 0$

$$f(0) = -5 \Leftrightarrow -2 - \lambda = -5 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

$$\text{ακόμα } f'(x) = x^2 - 2kx + \lambda \text{ οπότε } f'(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - 2k + \lambda = 0 \Leftrightarrow 1 - 2k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = 2$$

β. Για $k = 2$ και $\lambda = 3$ έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5 \text{ και}$$

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$i) f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f					

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$

ii) Η f για $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ίσο με $f(1) = -\frac{11}{3}$ και

για $x = 3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ίσο με $f(3) = -5$